DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations :

Dans tout ce problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

- E est l'espace vectoriel $\mathbf{C}^N$.
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E.
  On note 0 l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité.
- $\mathbf{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$.
  $\mathbf{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

  on désigne par $S_p(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f,
  par $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$
  et par $P(f)$ l'endomorphisme de E : $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).
- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $P_{F,G}$ de E tel que :
  $$\forall (x, y) \in F \times G \qquad P_{F,G}(x + y) = x.$$
- On notera $\mathbf{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

I

Soit f un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} e = p + q \\ f = a \cdot p + b \cdot q \\ f^2 = a^2 \cdot p + b^2 \cdot q. \end{cases}$$

1° Calculer $(f - a \cdot e) \circ (f - b \cdot e)$.
En déduire que f est diagonalisable.

2° *a.* Établir : $p \circ q = q \circ p = 0, \quad p^2 = p, \quad q^2 = q.$

b. Montrer : $S_p(f) = \{a, b\}$.

c. On suppose que $ab \neq 0$.
Démontrer que f est bijective et que : $\forall m \in \mathbf{Z} \quad f^m = a^m \cdot p + b^m \cdot q.$

3° Démontrer que p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - a \cdot e)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - b \cdot e)$ et que q est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - b \cdot e)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - a \cdot e)$.

4° On pose $F = \{x \cdot p + y \cdot q \mid (x, y) \in \mathbf{C}^2\}$.

a. Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

b. Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.

c. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

Tournez la page S. V. P.

5° Exemple :

On pose :
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$.
En déduire A^m en fonction de I et J.

b. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))^2$ tel que : $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad A^m = a^m B + b^m C$.

c. Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que : $\quad M^2 = A$.

II

Soit : $p_1, p_2, \dots, p_n$ n endomorphismes non nuls de E,
$x_1, x_2, \dots, x_n$ n nombres complexes distincts,
et f un endomorphisme de E tel que : $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m \cdot p_k$.

1° Montrer : $\quad \forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \cdot p_k$.

2° On pose :
$$\Pi = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \quad \text{et pour tout } l \in \mathbb{N}_n,$$
$$\Pi_l = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq l}} (X - x_k) \quad \text{et} \quad L_l = \frac{1}{\Pi_l(x_l)} \Pi_l.$$

a. Calculer $\Pi(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

b. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N}_n \quad p_k = L_k(f)$.

Vérifier que : $\quad \forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2 \quad p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ p_k & \text{si } k = l. \end{cases}$

c. Démontrer que : $\quad S_p(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

3° Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}_n$:
p_k est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - x_k \cdot e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \operatorname{Ker}(f - x_l \cdot e)$.

4° On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

a. Quelle est la dimension de F ?

b. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f) \cap F$.

c. Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ?
[On précisera le nombre de ces projecteurs et les éléments caractéristiques de chaque projecteur.]

5° On suppose $n = N$.

a. Démontrer : $\quad (\forall g \in \mathcal{L}(E)) \; [g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in F]$.

b. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f)$.

6° Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que :
$$S_p(h) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$
Démontrer qu'il existe n endomorphismes non nuls de E $q_1, q_2, \dots, q_n$ tels que :
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad h^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m \cdot q_k.$$

Tournez la page S. V. P.

7° *Exemple :*

On considère la matrice : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de A.

b. Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices :
$A_1 = L_1(A)$ $A_2 = L_2(A)$ et $A_3 = L_3(A)$.

c. Déterminer en fonction de A_1, A_2 et A_3 toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telles que $M^2 = A$.

III

Soit u un endomorphisme u de E tel que :

$$u^n = 0 \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0.$$

1° *a.* Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

b. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Établir :

$$(P(u) = 0 \Leftrightarrow X^n \text{ divise } P).$$

c. Démontrer que :

$$\left(\mathcal{R}(u) \neq \varnothing \Rightarrow n \leqslant \frac{N+1}{2}\right).$$

2° *a.* Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que : $\forall x \in]-1, 1[\quad \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

b. On pose : $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

On prend dans la suite du problème $\omega \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et on pose : $Q_{n,\omega} = \omega\, P_n\left(\dfrac{X}{\omega^2}\right)$.

3° *a.* Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

b. Établir : $\mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e) \neq \varnothing$.

4° On suppose $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

On suppose que $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e)$.

a. Démontrer que g commute avec u.

b. Prouver qu'il existe $P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = (P(u))(x)$.

Établir : $g = P(u)$.

c. Démontrer que : $\mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e) = \{Q_{n,\omega}(u), -Q_{n,\omega}(u)\}$.

5° *Application :*

Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

6° On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \varnothing$.

Démontrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

Tournez la page S.V.P.

7° Soit A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer les matrices qui commutent avec A.

b. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le polynôme caractéristique de f s'écrit :

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - X)^{\alpha k}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

On pose $E_k = \mathrm{Ker}\,[(f - x_k \cdot e)^{\alpha k}]$ et on rappelle que $\bigoplus\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} E_k = E$.

1° *a.* Démontrer qu'il existe un unique polynôme Φ_f de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que :

$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(f) = 0\} = \{\Phi_f\, Q \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

b. Démontrer que Φ_f s'écrit :

$$\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta k} \quad \text{avec} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_n \quad 1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k.$$

2° Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$.

Montrer :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_n \quad g(E_k) \subset E_k.$$

3° Établir :

a. $\left[x_1 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 > \dfrac{\alpha_1 + 1}{2} \right] \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \varnothing$.

b. $0 \notin S_p(f) \Rightarrow \mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

c. Démontrer que dans le cas où $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geqslant 2$:

$$(\mathcal{R}(f) = \varnothing) \quad \text{ou} \quad (\mathcal{R}(f) \text{ possède une infinité d'éléments}).$$

4° On suppose que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_n \quad \alpha_k = \beta_k.$$

a. Démontrer que si $0 \notin S_p(f)$ alors :

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{R}(f)) = 2^n.$$

b. On suppose $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

Démontrer que $\mathrm{card}\,(\mathcal{R}(f)) = 2^{n-1}$.